耦合场问题有限元程序的自动生成

钱华山

（北京飞箭软件有限公司 北京 100086）

摘要：本文介绍了有限元程序自动生成系统（FEPG）求解耦合场问题的基本设计方法。阐述了通过写出描述等效积分弱形式的 VDE (Vector form Partial Differential Equations) 文件和描述各场之间耦合关系的 GCN 文件来生成耦合问题的全部有限元源程序的方法。给出了求解三维热固耦合问题和一维土壤灌溉对流占优问题的 FEPG 表述。结果表明用解耦方式生成有限元程序并求解耦合场问题可以提高科研人员进行数值计算时的工作效率，有利于科研人员研究新的物理模型和新的计算方法。

关键词：耦合问题；有限元；算子分裂；程序生成

1. 引言

有限元方法已经有了近五十年的发展，有限元软件也经历了近四十年的历史。到目前为止对于单场问题的求解已比较丰富，但对于多物理场耦合问题的有限元求解的研究还很不充分，原因有两点，一是多物理场联立求解算法问题不容易解决，各方程的性质差异比较大，另一个问题是耦合问题的数据结构非常复杂，编程工作量巨大。而且现实世界中耦合问题是千变万化的，不同的场耦合，不同的耦合方式组合成无数种模式。在此情况下按通常的方式编制程序很难跟上对耦合场求解的需要。而采用有限元自动生成技术则可以很好地解决上述问题。

有限元程序自动生成系统（FEPG）系统可以根据有限元的基本原理，采用元件化程序设计和人工智能的技术，利用计算机自动生成有限元程序，突破了现有的有限元软件仅仅适用于某一特定领域研究的限制，适应于所有需用有限元方法求解的微分方程。FEPG 对于算法的修改和方程的添加具有好的适应性。用户只需根据自己的有限元问题，填写好方程表达式和算法表达式，FEPG 即能生成相应的有限元计算程序。对于多物理场耦合问题，FEPG 可根据用户规定的各物理场之间耦合的方式生成程序并能自动组织和传递数据。采用 FEPG 生成耦合问题的有限元程序，既可以让用户免去大量繁杂的编程劳动，保证了程序的正确性和统一性，又可以在新的算法出现时即时更新，重新生成计算程序，满足用户在计算精度、稳定性、计算时间等各方面的要求。

为实现生成耦合问题的计算程序，用户需要填写描述偏微分方程等效弱积分形式的 VDE 文件和描述各物理场之间耦合关系的 GCN 文件。本文通过三维热固耦合问题、一维土壤灌溉对流占优问题的程序生成说明这种做法的效率和对物理模型及算法的适应性。

2. 三维热固耦合问题

该问题的描述方程有

热传导方程
$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})=-q \tag{1}$$

固体变形描述方程组

平衡方程
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+f_z=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

几何方程
$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

热弹性 Hooke 定律

$$
\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 0.5-\nu & & \\ & & & & 0.5-\nu & \\ & & & & & 0.5-\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}-\frac{E\alpha T}{(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

首先分析各物理场之间的关系，温度场是独立求解的，不用到其他场变量。在求解固体变形时需要用到温度场的值，即固体变形和温度场耦合。在求得温度场和变形场之后，将变形代入几何方程求出应变，再将温度场的值和求出的应变值代入热弹性Hooke定律求出应力。分析好上述耦合关系后即可填写如下的GCN文件（\后为说明部分，下同）

```
defi          \ 给出耦合的各场之间的关系和每个场的算法
a ell b &     \ 用a,b,c对各场进行命名，第一个场用a表示，对应到变形场；ell表示椭圆型问
              \ 题的算法；b表示计算a场时用到b场的值，&表示组织数据文件时文件名不改变。
b ell         \ 第二个场用b表示，对应到温度场；算法也是用椭圆型问题的算法ell
c str a b     \ 第二个场用c表示，对应到应力场；str表示用最小二乘法解应力；a b表示计算
              \ 应力时用到温度场和变形场

startsin b    \ 对b场初始化
startsin a    \ 对a场初始化
solvsin b     \ 求解b场
solvsin a     \ 求解a场
stress c      \ 求解c场
```

如果温度场的定解条件为第一类边界条件时，方程(1)的等效弱积分形式为

$$
k(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial \delta u}{\partial x})+k(\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial \delta u}{\partial y})+k(\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial \delta u}{\partial z})=(q,\delta u)
\tag{5}
$$

其中(*,*)表示内积，δu 表示 u 的变分。对应的写成 VDE 文件为

```
disp u              \ 定义未知函数 u
coor x y z          \ 定义坐标系
shap c 8            \ 定义形函数，c 8 表示用 8 节点六面体单元
gaus c              \ 定义积分形式为顶点积分
mate ek q 1.0d01;0.0d0; \ 给出导热系数和热源密度，后面的为对应默认值
vect x x y z        \ 对应空间坐标向量

stif
dist=+[u/x_i;u/x_i]*ek   \ 表示方程(5)的左端

load=+[u]*q         \ 表示方程(5)的右端

end        \ 文件结束标志
```

类似地可以写出描述固体变形和应力的 VDE 文件。写出这些文件即可生成全部的计算热固耦合问题的有限元程序。

3．一维土壤灌溉对流占优问题

如下的方程为土壤的灌溉方程。其中 C 为单位体积土壤的含水量，D 为水在土壤中的扩散系数，v 为水在土壤中的对流系数。

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-v\frac{\partial C}{\partial x} \tag{6}$$

求在如下的边界条件和初始条件下，从地表到地下 100cm 处的土壤水浓度分布曲线。

初始条件　$C(x,0)=0$　　　　边界条件　$C(0,t)=1$，$C(L,t)=0$

其中各参数为：$D=1cm^2/\min$，$v=5000cm/\min$，$L=100cm$。

如果按照 Galerkin 法可得如下的

$$(\frac{\partial C}{\partial t},\overline{C})+(D\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial \overline{C}}{\partial x})+(v\frac{\partial C}{\partial x},\overline{C})=0 \tag{7}$$

其相应的 FEPG 表述为

```
disp u
coor x
shap l 2    \ 表示两节点线单元
gaus l
mass l
mate fd fc 1 5000    \ fd 对应于 D，fd 对应于 v
load 0.0

stif
```

dist=+[u/x;u/x]*fd+[u/x;u]*fc

end

但是由于 $v >> D$，所以该问题为对流占优问题，直接用 Galerkin 有限元得不到稳定的解。本文采用算子分裂求解。将对方程(5)的解分解成两步

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} = -v\dfrac{\partial C}{\partial x} \end{cases} \tag{8}$$

第一个方程解扩散项，第二个方程解对流项，其中求解第二步时用到第一步的结果。将两步计算看成两个场，组织该分裂算法的 GCN 文件如下

```
defi
a parb &        \ a 场描述方程的扩散项，parb 表示抛物型方程的向后差分法
b hypls &       \ b 场描述方程的对流项，hypls 表示解抛物型方程的最小二乘法

STARTsin a                \ 初始化 a 场
startsin b                \ 初始化 b 场
if exist stop del stop    \ 清空时间步计算终止标志
:1                        \ 时间步循环标号
bft                       \ 计算每一步的边值
solvsin a                 \ 求解 a 场
solvsin b                 \ 求解 b 场
post a                    \ 后处理输出
if not exist stop goto 1  \ 时间步计算未终止转入下一时间步
```

算子分裂后，第一个方程的等效积分弱形式为

$$(\frac{\partial C}{\partial t},\overline{C}) + D(\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}) = 0 \tag{9}$$

对应的 VDE 文件可写为

```
disp u
coor x
shap l 2
gaus l
mass l
mate fd fc 1 5000
load 0.0

stif
dist=+[u/x;u/x]*fd

end
```

算子分裂后，用最小二乘法构造第二个方程的等效积分弱形式

$$(C+v\frac{\partial C}{\partial x}\Delta t,\overline{C}+v\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\Delta t)=(C_n,\overline{C}+v\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\Delta t) \tag{10}$$

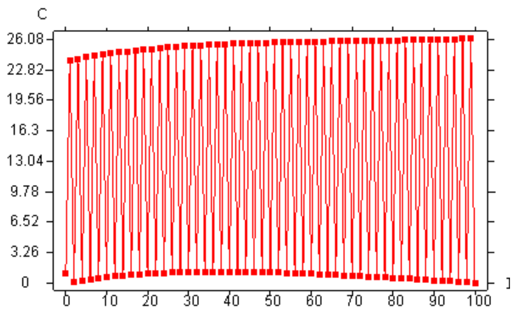
C_n 解第一个方程得到的结果。对应写成 VDE 文件为

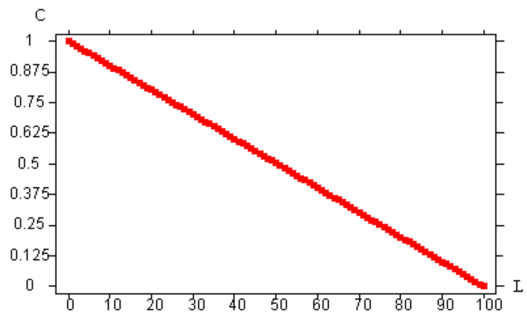
```
disp u
coor x
shap l 2
gaus l
mass l
coef un        \ 表示传入第一个方程的计算结果
func con
mate fd fc 1 5000

func
con=+[u]+[u/x]*fc*dt      \ 表示 C+v∂C/∂x Δt

stif
dist=+[con;con]

load=+[con]*un
```






```
end
```

图 3.1 Galerkin 有限元的结果　　　　图 3.2 算子分裂法求得的结果

从上面的例子的我们可以看出算法构造对于问题求解的重要意义。

有限元方法具有的通用性，使它得到了广泛的应用，这也带来了它的程序的复杂性。一个功能完善的有限元程序至少有上万句的代码，需要好几个人年的劳动才能完成。这对科研人员来说，他们更关心物理模型和计算方法，而不是编写程序。FEPG 利用计算机生成相应的有限元程序，不仅极大地提高了编程效率，而且保证了程序的正确性和统一性，又可以在新的算法出现时及时更新，重新生成计算程序，满足研究者在计算精度、稳定性等各方面的要求。

参考文献

[1] Zienkiewicz & R.L.Taylor, The Finite Element Method(5^{th} Edition), Vol.I, II, III. Butterworth - Heinemann, 2000.

[2] 王勖成, 邵敏，有限单元法基本原理和数值方法，清华大学出版社。

[3] 陆明万, 罗学富，弹性力学理论基础，清华大学出版社。

[4] 基于 FEPG 有限元方法，北京飞箭软件有限公司, 2003. 3.

Generate Finite Element Program on Couple Field

Qian Huashan

(Beijing FEGEN Software Co.Ltd., Beijing, 210016, P.R. China)

ABSTRACT: The method of solving couple problem which based on Finite Program Generator (FEPG) is introduced in this paper. FE programs can be built by writing VDE file according to the weak form of partial differential equations, and GCN file for describing couple relationship among each field. The detail description on 3D thermal-solid couple problem and 1D large convection value soil irrigation equation is provided. It is effective to generate FE program on couple problem when researcher proceed numeric simulation, their can take much more time focus on physical model and new algorithm.

KEY WORDS: Couple Problem, Operator Split, Finite Element, Program Generator