

求解带摩擦接触问题的拟高斯迭代法

刘金朝

中国铁道科学院

摘要: 本文提出了一种新的求解带摩擦的接触问题的数值算法, 即拟高斯迭代法。它对法向接触力和切向接触力进行交替迭代, 并利用高斯迭代法求解法向接触力, 利用分块高斯迭代法求解切向接触力。同其它的数值算法相比, 该算法保留了关于接触力的柔度矩阵的稀疏性和对称性, 利用矩阵乘向量可以分步进行的技巧, 该算法只存储关于接触力的柔度矩阵的下三角形矩阵的非零元和对角矩阵。根据可能接触边界的分布特点, 将区域分解成不同的子区域, 引进拉格朗日乘子表示接触力, 保证了各子区域的网格剖分和位移求解是完全独立的。基于上述算法和有限元程序自动生成系统开发了相应的求解带摩擦接触问题的软件, 数值实验表明, 程序是正确的, 算法是高效的。

关键词: 摩擦, 接触问题, 拟高斯迭代法, 拉格朗日乘子, 区域分解

§ 1. 引言

接触问题在工程和自然界中大量存在, 如高速火车的弓网接触问题, 带断层或裂缝的拱坝稳定性问题, 地震震源破裂和滑坡问题等。其特点和难点是接触边界和接触力事先是未知的, 当考虑摩擦滑动时, 能量变分原理不再成立^[1]。目前求解接触问题的方法有解析法^{[2][3]}, 半解析法^{[4][5]}, 和数值算法, 如¹实验误差法^{[6][7]}, 线性互补法^[8], 非线性互补法^[1], 罚函数法^{[9][10]}和拉格朗日乘子法^[11]。

随着计算机的发展, 基于有限元的数值算法成了求解接触问题的主要方法。最早采用而且最常用的数值算法是实验误差法, 即对状态进行开闭迭代^{[6][7]}, 在给定状态下, 需要求解的是关于位移和接触力的等式方程。其优点是力学意义清晰, 程序易实现。其缺点是, 当考虑滑动时, 关于位移和接触力系数矩阵是非对称不定的。当接触边界较大, 接触状态变化较快时, 已有的实验误差法一般是不收敛的。

本文提出了一种新的求解带摩擦接触问题的数值算法, 即拟高斯迭代法。它既具有实验误差法的优点, 又避免了实验误差法的缺点。它对法向接触力和切向接触力进行交替迭代, 并利用高斯迭代法求解法向接触力, 利用分块高斯迭代法求解切向接触力。同其它数值算法相比, 该算法保留了关于接触力的柔度矩阵的稀疏性和对称性, 利用矩阵乘向量可以分步进行的技巧, 该算法只存储关于接触力的柔度矩阵的下三角形矩阵的非零元和对角矩阵。

从子结构的基础上发展起来的区域分解算法^[12]是求解大规模问题最有效的方法。本文的算法根据可能接触边界的分布特点, 将区域分解成不同的子区域, 引进拉格朗日乘子表示接触力, 保证了各子区域的网格剖分和位移求解是完全独立的。对于罚函数法^{[9][10]}来说, 在不引进新的边界变量的情况下, 整个区域的位移场必须同时求解, 而且关于整个区域的位移场的刚度矩阵是变化的。

线性互补^[8]和非线性互补法^[1]在一定的条件下弥补了实验误差法收敛性很难保证的缺

陷,但是它们破坏了关于接触力的柔度矩阵的稀疏性。当接触区域很大或接触边界的网格剖分很密时,关于接触力的柔度矩阵的存储量和计算量会大得让人难以接受。本文的算法保留了关于接触力的柔度矩阵的稀疏性和对称性。

基于本文的算法和有限元程序自动生成系统^[13]开发了相应的软件,数值实验表明,程序是正确的,算法是高效的。

§ 2. 接触问题的基本方程及其离散格式

根据可能接触边界的分布特点,将区域分解成不同的子区域。考虑由 M 个子区域 $\Omega_i, i=1,2,\dots,M$ 组成的区域。对于子区域 i , 其动力学平衡方程可表示为

$$\rho_i u_{tt}^i + c_i u_t^i - \sigma_{jk,k}^i(u^i) = f_j^i, \quad j=1,2,3 \quad \text{in } \Omega_i \quad i=1,2,\dots,M \quad (2.1)$$

其中 ρ 表示密度, c 表示阻尼, σ 表示应力张量, u 表示位移, u_t 表示速度, u_{tt} 表示加速度, f 表示体力。

子区域 i 的初边值条件可表示为:

$$\begin{cases} u^i = u^{io}, & \text{on } \Gamma_i^d \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jk}^i n_k = t_f^i, & \text{on } \Gamma_i^f \end{cases} \quad (2.2b)$$

$$\begin{cases} u^i|_{t=0} = u_0^i \end{cases} \quad (2.2c)$$

$$\begin{cases} u_t^i|_{t=0} = v_0^i \end{cases} \quad (2.2d)$$

其中 Γ^d 和 Γ^f 分别表示位移边界和应力边界。

引进拉格朗日乘子 λ 表示接触力,不同子区域之间的可能接触边界条件为:

$$\text{a) 分离状态} \quad (u^i - u^j)^n - \delta^n \geq 0, \quad \lambda^n = 0, \quad \lambda^t = 0 \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) 粘着状态} \quad & (u^i - u^j)^n - \delta^n = 0, \quad \lambda^n \geq 0 \\ & (u^i - u^j)^t - \delta^t = 0 \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\text{c) 滑动状态} \quad (u^i - u^j)^n - \delta^n = 0, \quad |\lambda^t| = \mu \lambda^n \quad (2.3c)$$

其中 $()^n, ()^t$ 分别表示法向和切向分量, δ 表示初始间隙。 λ^n, λ^t 分别表示法向和切向接触力, μ 为摩擦系数。

引进拉格朗日乘子 λ 处理接触边界条件,对每一个子区域独立进行网格剖分和有限

元离散后，方程 (2.1) 的半离散形式可表示如下：

$$M^i U_u^i + C^i U_t^i + K^i U^i = F^i + B_i \lambda \quad (2.4)$$

其中 M 表示质量矩阵， C 表示阻尼矩阵， K 表示刚度矩阵， F 表示载荷项， B 表示位移与接触力的相关矩阵， λ 表示接触力，

$$B_i = [B_i^n \ B_i^t] = [B_{i1}^n \ B_{i1}^t \ B_{i2}^n \ B_{i2}^t \ \cdots \ B_{il}^n \ B_{il}^t]$$

利用中心差分格式对 (2.4) 再进行时间离散，

$$M^i \frac{U_{N+1}^i - 2U_N^i + U_{N-1}^i}{\Delta t^2} + C^i \frac{U_{N+1}^i - U_{N-1}^i}{2\Delta t} + K^i U_N^i = F_{N+1}^i + B_i \lambda_{N+1} \quad (2.5)$$

其中 N 表示时间步， Δt 表示时间增量。令

$$\begin{aligned} dU_N^i &= U_{N+1}^i - U_N^i \\ dU_{N-1}^i &= U_N^i - U_{N-1}^i \end{aligned} \quad (2.6)$$

代入(2.5) 式，并整理可得，

$$A^i dU_N^i = F_t^i + B_i \lambda_{N+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, M \quad (2.7)$$

其中

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{M^i}{\Delta t^2} + \frac{C^i}{2\Delta t} \\ F_t^i &= F_{N+1}^i + \frac{M^i}{\Delta t^2} dU_{N-1}^i - \frac{C^i}{2\Delta t} dU_{N-1}^i - K^i U_N^i \end{aligned} \quad (2.8)$$

由表达式 (2.6) 知，可能接触边界条件 (2.3) 的离散形式可表示为：

$$\text{a) 分离状态} \quad (dU_N^i - dU_N^j)^n - \delta_N^n \geq 0 \quad \lambda_{N+1}^n = 0, \quad \lambda_{N+1}^t \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) 粘着状态} \quad & (dU_N^i - dU_N^j)^n - \delta_N^n = 0, \quad \lambda_{N+1}^n \geq 0 \\ & (dU_N^i - dU_N^j)^t - \delta_N^t = 0 \end{aligned} \quad (2.9b)$$

$$\text{c) 滑动状态} \quad (dU_N^i - dU_N^j)^n - \delta_N^n = 0, \quad \lambda_{N+1}^n \geq 0, \quad |\lambda_{N+1}^t| = \mu \lambda_{N+1}^n \quad (2.9c)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_N^n &= (U_N^j - U_N^i)^n - \delta^n \\ \delta_N^t &= (U_N^j - U_N^i)^t - \delta^t \end{aligned}$$

为接触间隙，会随着时间步变化，应根据可能接触边界的几何位置自动判定和修正。

§ 3. 拟高斯迭代法及其矩阵表示

下面我们将利用拟高斯迭代法求解第 N 个时间步满足关系式 (2.7) — (2.9) 的位移增量

与接触力增量。为了叙述方便，这里我们将关于时间步 N 的下标省略。将式 (2.7) 写成整体的形式，有

$$A dU = F + H \lambda \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A^1, A^2 \dots A^M) \\ dU &= \text{diag}(dU^1, dU^2 \dots dU^M) \\ H &= [H_1^n, H_1^t, H_2^n, H_2^t \dots H_L^n, H_L^t] \\ H_k &= B_{ik} + B_{jk} \end{aligned}$$

其中 L 表示拉格朗日乘子的个数， i, j 为与第 k 个拉格朗日乘子相关的子区域号。

拟高斯迭代法 (I):

1. 迭代步赋初值 $P = 0$ ，接触力赋初值 $\lambda = 0$ ；
2. 迭代步赋值 $P = P + 1$ ，误差赋初值 $ERR = 0$ ，对表示接触力的拉格朗日乘子循环， $k = 1, 2 \dots L$ ，假定其它乘子所表示的接触力已知，计算第 k 个乘子所表示的接触力；

- ①. 假定第 k 个乘子的切向分量力已知，接触状态为粘着状态，计算第 k 个乘子法向分量力，即求解下列方程组：

$$\begin{aligned} A dU &= F + \sum_{j < k} H_j \lambda_j^{P+1} + \sum_{j > k} H_j \lambda_j^P + H_k^t (\lambda_k^t)^P + H_k^n (\lambda_k^n)^{P+1} \\ (H_k^n)^T dU &= \delta_k^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

- ② 状态修正：若 $(\lambda_k^n)^{P+1} < 0$ ，则

$$(\lambda_k^n)^{P+1} = 0, \quad (\lambda_k^t)^{P+1} = 0$$

计算误差后，转 3；

$$ERR = ERR + |\lambda_k^{P+1} - \lambda_k^P|^2;$$

- ③ 假定第 k 个乘子的法向分量力已知，接触状态为粘着状态，计算第 k 个乘子切向分量力，即求解下列方程组：

$$\begin{aligned} A dU &= F + \sum_{j < k} H_j \lambda_j^{P+1} + \sum_{j > k} H_j \lambda_j^P + H_k^n (\lambda_k^n)^{P+1} + H_k^t (\lambda_k^t)^{P+1} \\ (H_k^t)^T dU &= \delta_k^t \end{aligned} \quad (3.3)$$

- ④ 状态修正：若 $|(\lambda_k^t)^{P+1}| > \mu((\lambda_k^n)^{P+1})$ ，则

$$(\lambda_k^t)^{P+1} = \frac{\mu(\lambda_k^n)^{P+1}}{|(\lambda_k^t)^{P+1}|} (\lambda_k^t)^{P+1}$$

计算误差

$$ERR = ERR + |\lambda_k^{P+1} - \lambda_k^P|^2$$

3. 收敛性判定, 若达到收敛条件, 迭代结束; 否则转 2;

由 (3.2) 和 (3.3) 将位移增量消去, 可得到关于第 k 个乘子的方程如下

$$\begin{aligned} (H_k^n)^T A^{-1} H_k^n (\lambda_k^n)^{P+1} &= \delta_k^n - (H_k^n)^T A^{-1} F - \sum_{j<k} (H_k^n)^T A^{-1} H_j \lambda_j^{P+1} \\ &\quad - \sum_{j>k} (H_k^n)^T A^{-1} H_j \lambda_j^P - (H_k^n)^T A^{-1} H_k^t (\lambda_k^t)^P \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} (H_k^t)^T A^{-1} H_k^t (\lambda_k^t)^{P+1} &= \delta_k^n - (H_k^t)^T A^{-1} F - \sum_{j<k} (H_k^t)^T A^{-1} H_j \lambda_j^{P+1} \\ &\quad - \sum_{j>k} (H_k^t)^T A^{-1} H_j \lambda_j^P - (H_k^t)^T A^{-1} H_k^n (\lambda_k^n)^{P+1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

很显然, 上两式的系数矩阵及其右端项都可以由关于接触力的柔度矩阵 R 和接触力增量的右端项 b 表示, 其中

$$R = H^T A^{-1} H = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1L} \\ R_{11} & R_{22} & \cdots & R_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{L1} & R_{L2} & \cdots & R_{LL} \end{pmatrix} \quad (3.6a)$$

$$R_{kk} = \begin{pmatrix} R_{kk}^{nn} & R_{kk}^{nt} \\ R_{kk}^{tn} & R_{kk}^{tt} \end{pmatrix} \quad (3.6b)$$

$$b = H^T A^{-1} F = (b_1^n \ b_1^t \ b_2^n \ b_2^t \ \cdots \ b_L^n \ b_L^t)^T$$

柔度矩阵 R 具有一些很好的性质, 其一它是稀疏的; 若系数矩阵 A^{-1} 对称正定, H 矩阵列满秩, 则柔度矩阵 R 是对称正定的。当采用本文 §2 的显式离散格式时, 由 (2.7) 式可知, 系数矩阵 A 只与质量矩阵和阻尼矩阵有关, 而与刚度矩阵 K 无关。若采用集中质量矩阵和集中阻尼矩阵, 则系数矩阵 A 是对角矩阵, 从而保证了柔度矩阵 R 的对称正定性和高度稀疏性, 它的存储量为 $O(L)$, 其中 L 为表示接触力的乘子数。

由柔度矩阵 R 的对称性, 可将其表示为

$$R = L + D + L^T \quad (3.7)$$

其中 L, D 分别为柔度矩阵 R 的下三角形矩阵和对角矩阵。对于柔度矩阵 R , 我们只需用一维数组存储它的对角矩阵 D 和的三角形矩阵 L 的非零元部分。这样的存储方式会给 (3.4)

(3.5) 的右端项的计算带来困难, 本文给出了一种新的处理办法。

利用柔度矩阵 R 和矩阵乘向量可以分步进行的技巧, 拟高斯迭代法又可描述如下:

拟高斯迭代法 (II):

1. 迭代步赋初值 $P = 0$, 接触力赋初值 $\lambda = 0$;
2. 为处理对称稀疏的存储方式给计算带来的困难, 计算中间向量 g

$$g = \delta - b - L^T d\lambda^P \quad (3.8)$$

3. 迭代步赋值 $P = P + 1$, 误差赋初值 $ERR = 0$, 对表示接触力的拉格朗日乘子循环, $k = 1, 2, \dots, L$, 假定其它乘子所表示的接触力已知, 计算第 k 个乘子所表示的接触力;

- ① 假定第 k 个乘子的切向分量力已知, 接触状态为粘着状态, 计算第 k 个乘子法向分量力,

$$(\lambda_k^n)^{P+1} = (R_{kk}^{nn})^{-1} (g_k^n - \sum_{j < k} R_{kj} \lambda_j^{P+1}) \quad (3.9)$$

- ② 状态修正: 若 $(\lambda_k^n)^{P+1} < 0$, 则

$$(\lambda_k^n)^{P+1} = 0, \quad (\lambda_k^t)^{P+1} = 0$$

计算误差后, 转 3;

$$ERR = ERR + |\lambda_k^{P+1} - \lambda_k^P|^2;$$

- ③ 假定第 k 个乘子的法向分量力已知, 接触状态为粘着状态, 计算第 k 个乘子切向分量力,

- a) 对于三维情形, 记 $R_{kk}^{tt} = (R_{kk}^{t1} \quad R_{kk}^{t2})$, 在计算切向分量力前,

需作如下的特殊处理:

$$g_k^{t2} = g_k^{t2} + R_{kk}^{t2} (\lambda_k^{t2})^P$$

- b) 计算第 k 个乘子切向分量力,

$$(\lambda_k^t)^{P+1} = (R_{kk}^{tt})^{-1} (g_k^t - \sum_{j < k} R_{kj} \lambda_j^{P+1} - R_{kk}^n \lambda_k^{P+1}) \quad (3.10)$$

- ④ 状态修正: 若 $|(\lambda_k^t)^{P+1}| > \mu((\lambda_k^n)^{P+1})$, 则

$$(\lambda_k^t)^{P+1} = \frac{\mu(\lambda_k^n)^{P+1}}{|(\lambda_k^t)^{P+1}|} (\lambda_k^t)^{P+1}$$

计算误差

$$ERR = ERR + |\lambda_k^{P+1} - \lambda_k^P|^2$$

4. 收敛性判定, 若达到收敛条件, 迭代结束; 否则转 2;

§ 4. 算法的特殊情形

特殊情形 I: 只考虑法向接触力, 不考虑切向接触力

当只考虑法向接触力, 不考虑切向接触力时, 接触问题退化为单边约束问题, 它的离散形式 (3.1) 和 (2.9) 退化为下述形式:

$$\begin{aligned} A dU &= F + H^n \lambda^n \\ (H^n)^T dU - \delta^n &\geq 0, \lambda^n \geq 0, \\ ((H^n)^T dU - \delta^n) \lambda^n &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中上标 n 表示法向分量。

将上式中的位移增量消去, 得到关于接触力增量的线性互补问题, 它等价于下面的二次规划问题:

$$\begin{aligned} \text{求 } \lambda^n &\geq 0, \\ F(\lambda^n) &= \min_{\lambda \geq 0} F(\lambda), \\ F(\lambda) &= \frac{1}{2} \lambda^T (H^n)^T A^{-1} H^n \lambda + \lambda^T (H^n)^T A^{-1} F - \lambda^T \delta^n \end{aligned} \quad (4.2)$$

利用拟高斯迭代法求解 (4.2) 时, 只需将算法中的第③, ④小步去掉即可。在这种特殊情况下, 拟高斯迭代法退化为通常求解二次规划问题的高斯迭代法, 其收敛性证明见^[14]。

特殊情形 II: 法向接触力已知, 求切向接触力

当法向接触力已知, 切向接触力是下面非线性规划问题的解, 对于二维的情形, 下面非线性规划问题是一个二次规划问题。

$$\begin{aligned} \text{求 } \lambda^t &\in K, \\ F(\lambda^t) &= \min_{\lambda \in K} F(\lambda) \\ F(\lambda) &= \frac{1}{2} \lambda^T R_u \lambda - \lambda^T R_m \lambda^n - \lambda^T b_t \\ K &= \{\lambda^t \mid |\lambda^t| \leq \mu \lambda^n\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 t 表示切向分量, n 表示法向分量, T 表示转置。

利用拟高斯迭代法求解 (4.3) 时, 只需将算法中的第①, ②小步去掉即可。拟高斯迭代法退化为求解非线性规划问题的分块高斯迭代法, 其收敛性证明见^[15]。

特殊情形 III: 接触状态恒为粘着状态

若接触状态恒为粘着状态, 接触问题退化为连续问题。将区域分解成子区域, 引进拉格朗日乘子处理不同子区域之间界面网格的非匹配性。在第 N 个时间步, 位移增量和表示接触力的拉格朗日乘子满足如下的等式方程:

$$\begin{aligned} AdU &= F + Hd\lambda \\ H^T dU &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

将上式中的位移增量消去, 得到关于接触力增量的方程

$$H^T A^{-1} H d\lambda = -H^T A^{-1} F \tag{4.5}$$

当采用 § 2 的显式离散格式, 柔度矩阵 $H^T A^{-1} H$ 的条件数为常数^[16]。新的实验误差法退化为求解 (4.5) 的 GAUS—SEIDEL 迭代法, 即算法中关于状态修正的第 ②, ④小步应去掉。

§ 5. 数值实验

§ 5.1 算例 1

将一根无限长圆柱放在非常光滑的平面上, 并在它的顶端施加单位载荷 F , 如图 1 所示。

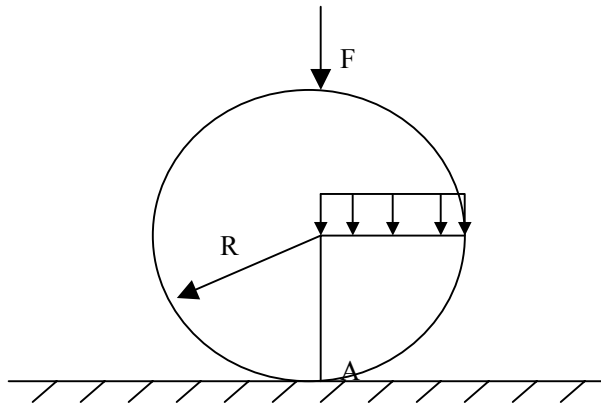


图 1 模型

这是一个经典的 Herz 接触问题, 最大接触力发生在接触点 A 处, 由 Goldsmith^[17] 可知, 最大接触压力 P_{\max} 和接触半径 b 的理论解为

$$\begin{aligned} b &= 2.0 * \text{sqrt}(F * R * (1.0 - \nu^2) / E / \pi) \\ P_{\max} &= E * b / (2 * R * (1.0 - \nu^2)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 E 弹模, ν 泊松比。这是一个平面应变问题, 考虑到对称性, 取圆柱截面四分之一进行计算。为了进行接触判定, 在圆柱截面下面加了一个不变形的刚性体。虽然进行了网格

剖分，但每个节点的自由度为固定约束。有限元模型及其网格如图 2 所示。

取 A 点垂直方向的正应力同最大接触压力进行比较。对于不同的载荷 F 和不同的弹模 E ，接触半径和最大接触力与理论值的比较见表 1，对应于表 1 的最后一种工况，圆柱体受载后的变形情况如图 3 所示。

表 1

F	E(弹模)	b_{real}	b_{FE}	P_{real}	P_{FE}	$\ P_{real} - P_{FE}\ / P_{real}$
1600	2000	2.723	2.672	374.5	363.42	2.84%
1600	4000	1.925	1.922	528.99	520.60	1.59%
1600	6000	1.572	1.588	647.88	640.67	1.11%
800	2000	1.925	1.922	264.50	260.30	1.58%
800	4000	1.361	1.372	374.05	370.79	0.872%
800	6000	1.111	1.146	458.12	455.51	0.4569%

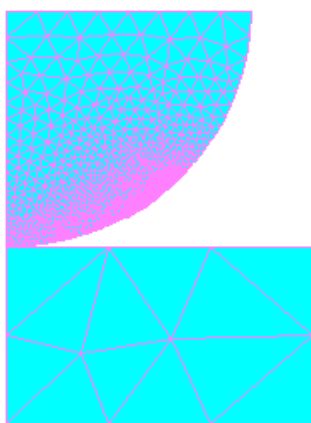


图 2 有限元模型及其网格

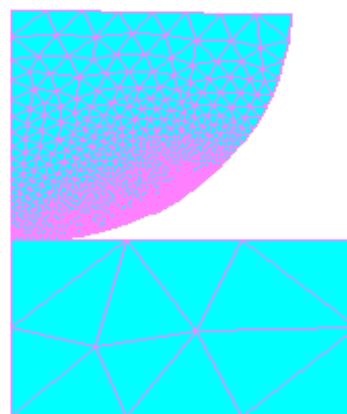


图 3: 变形图

由表 1 可知，接触压力的误差在 3% 之内，说明计算结果是正确的；接触压力的误差随着接触半径变小而变小，这与 Herz 理论解要求接触半径远远小于圆柱半径，即 $b \ll R$ 相吻合。接触半径的误差相对要大些，这是由于接触半径与网格的尺寸和接触端点的位置有关。

§ 5.2 算例 2

我们用只有垂直方向变形的三维粘弹性块体来检验程序及算法的正确性，模型及其网格如下图所示

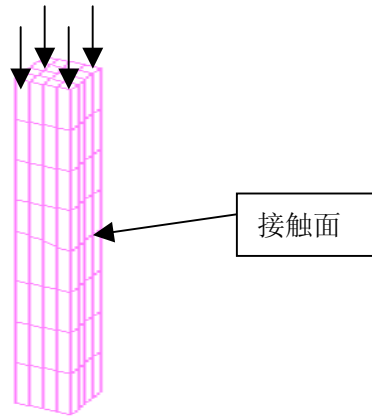


图 4: 模型及其网格

其中块体长、宽均为 30m，高为 600m，中间内部有一倾斜接触面（没有接触到柱体侧面），倾角为 30° 。从 $t=0$ 时刻起在其顶面施加 $p_0 = 1000$ (pa) 的恒定压力，下底面固定，四个侧面只有 z 方向的位移， x, y 方向位移约束。杨氏模量为 $1.0e10\text{Pa}$ ，粘性系数为 $1.0e10\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，泊松比取为 0.25，块体密度和阻尼系数均定为 0（不考虑加速度影响），接触面的摩擦系数为 0.6。计算时间步长是 1 秒，一共计算 60 步。

柱体四个侧面 x, y 方向位移都被固定，接触面不会滑动，这就相当于一个连续体，可以与上面的理论解作比较。我们主要比较块体上底面中心点 z 向位移的数值解和理论解。取

$$\nu = 0.25, E = 1.0E + 10, \eta = 1.0E + 10, G = 0.4E + 10, H = 600$$

该问题的理论解^[18]为

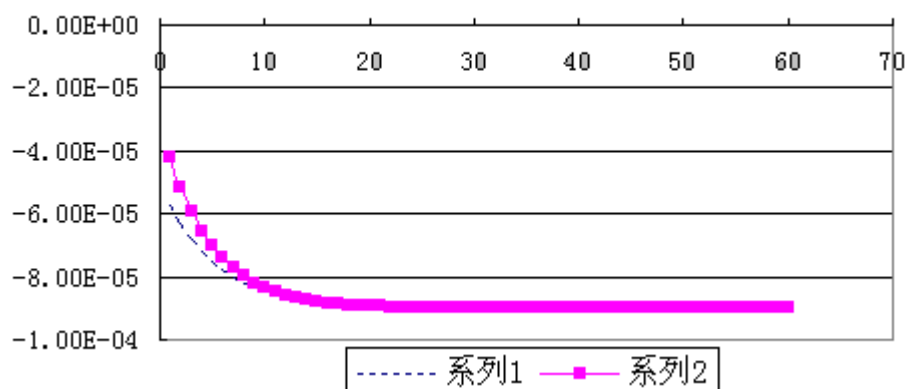
$$U_z = -9.0e - 5 \times \left[1.0 - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{2}{9}t\right) \right] \quad (5.2)$$

在不同时间步，理论解和数值解的比较见表 2 和图 5，

表 2

时间 t	数值解	理论解	误差
10	-0.84623E-04	-0.83498E-04	0.11251E-06
20	-0.89277E-04	-0.89295E-04	0.18387E-07
30	-0.89903E-04	-0.89924E-04	0.20645E-07
40	-0.89987E-04	-0.89992E-04	0.47274E-08
50	-0.89998E-04	-0.89999E-04	0.11042E-08
60	-0.90000E-04	-0.90000E-04	-0.97176E-010

图 5



由图 5 可看出，60 秒后系统达到平衡，平衡后的 z 方向的位移以及 x, y, z 方向的应力分别如图 6 (a), (b), (c), (d)所示。

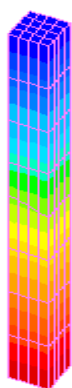


图 6(a)

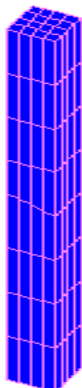


图 6(b)

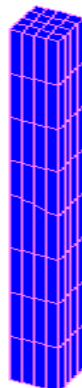


图 6(c)

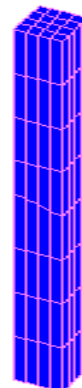


图 6(d)

从图 5 可看出有限元解能同理论解很好的吻合；从图 6 可看出应力松弛平衡后，三个方向的应力都收敛于压力 P_0 。由上述结果可知，程序是正确的和可靠的。

§ 6. 结论

本文提出的求解带摩擦的接触问题的数值算法拟高斯迭代法具有以下特点：

- (1). 对法向接触力和切向接触力进行交替迭代，并利用高斯迭代法求解法向接触力，利用分块高斯迭代法求解切向接触力；
- (2). 同其它数值算法相比，该算法保留了关于接触力的柔度矩阵的稀疏性和对称性，利用矩阵乘向量可以分步进行的技巧，该算法只存储关于接触力的柔度矩阵的下三角形矩阵的非零元和对角矩阵；
- (3). 根据可能接触边界的分布特点，将区域分解成不同的子区域，引进拉格朗日乘子表示接触力，保证了各子区域的网格剖分和位移求解是完全独立的，大大提高了该算法求解大规模接触问题的能力；
- (4). 该算法对法向接触力和切向接触力进行交替迭代，关于该迭代法的收敛性的严格的数学证明有待进一步研究。

参考文献

1. 陈国庆、陈万吉、冯恩明, 三维接触问题的非线性互补原理及算法, 中国科学, 1995 年 11 月, 25 (11), P1181-1190。
2. K.L Johnson , Contact Mechanics, Cambridge University Press (1995)
3. G.M.L Gladwell, Contact Problems in the classical theory of elasticity , Sijhoff & Noordhoff , (1980)
4. T.F Conrey and A.Seireg, A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact, Journal of Applied Mechanics (Trans. ASME), 387-392 , 1971(6).
5. M. Sassi, M. Desvignes, A semi-numerical method for 3-dimension frictionless contact problems. Mathl. Comput. Modeling 1998(28), No4-8 pp413-425.
6. 何君毅, 林祥都, 工程结构非线性问题的数值解法, 国防工业出版社, 1994。
7. M.G. Katona, A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts, Int. J. Numer. Meth. Geomech, 7, 371-384 (1983).
8. Byung Man Kwak and Seok Soon Lee, A complementary problem formulation for two-dimensional frictional contact problems, Computers & Structure Vol. 28, No. 4, 469-480, 1988.
9. R.Courant, K.Friedrichs and H.Lewy, On the partial difference equations of mathematical physics, IBM Journal 11, 215-234 (1967).
10. W.I.Zangwill, Nonlinear programming via penalty functions, Management Science 13, 344-358 (1967).
11. Hilbert, L.B.L, Jr., y., w., Cook, N.G. w., Cai, y. And Liang, G.P. (b), A New discontinuous finite element method for interaction of many deformable bodies in geo-mechanics, Pro. 8th. Int. Conf. Comp. Meth, adv, Geomech., P931-936, 1994.
12. 吕涛、石济民、林振宝, 区域分解算法, 科学出版社, 1992。
- 13 G.P.Liang, Finite element program generator and finite element language, in Reliability and robustness of engineering software II (C.A.Berbbia, eds), Computational mechanics publications, London, 1991。
14. Byong-hun AHN , a Gauss-Seidel iteration method for nonlinear variational inequality problems over rectangles, operations research letters, 1982(1),117-120
15. Patric T. Harker, Jong-Shi Pang. Finite-dimensional variational inequality and Nonlinear complementarity problems :A survey of theory, algorithms and Applications. Mathematical Programming 48(1990) 161-220.
16. 刘金朝, 梁国平, 胡齐芽, 依赖时间的 Lagrange 乘子区域分解法的显示格式, 计算数学学报, 2001 (1), pp95-104。
17. Goldsmith, W. , Impact. London: Arnold,1960.
- 18.