

# 基于 FEPG 的热塑性复合材料的粘塑性有限元法

丁淑蓉 佟景伟 沈珉 李鸿琦  
(天津大学机械工程学院力学系 天津 300072)

**摘要:** 本文针对热塑性复合材料所特有的粘塑性模型, 利用有限元自动生成系统 (FEPG), 编制了自用的有限元程序。以本文的粘塑性模型为例, 将粘塑性分析的原理、有限元方法进行扼要的阐述。以单向纤维增强热塑性 PEEK 基复合材料为算例, 将有限元程序计算出的应力-应变数值模拟结果和实验结果进行比较得知, 二者非常接近。从而, 验证了所编程序的精确性, 同时, 也验证了所用粘塑性模型的可靠性。

**关键词:** 热塑性复合材料, AS4/PEEK, 率相关行为, 粘塑性模型, 有限元法, FEPG。

## 1. 引言

先进复合材料是指用高性能纤维(晶须、颗粒)及其编织物增强不同基体所制成的一种高级材料。其特点是高比强、高比模, 并具有多功能性, 它是实现先进设计的物质基础, 特别是在现代精良武器的设计和制造中先进复合材料有着不可替代的作用。

目前, 国际上重点发展的、用于先进复合材料的热塑性树脂基体之一是聚醚醚酮 (polyetheretherketon, 简称 PEEK)。PEEK 以其优良的耐高温、耐化学环境、高强度、高韧性和可加工性等特点, 成为继热固性树脂基复合材料之后, 先进复合材料研究开发的热点。本文所研究的热塑性基复合材料是一种以石墨纤维增强的热塑性 PEEK 复合材料。Modonnell 飞机制造公司已将 AS4/PEEK 用于 F/A-18 战斗机外翼蒙皮。在承受冲击载荷的结构中, 人们对先进复合材料的应用越来越感兴趣。所以, 复合材料在高应变率下的响应在复合材料界受到很大的关注。有一些学者<sup>[1]-[3]</sup>报道了纤维增强复合材料的高应变率力学行为, 他们发现纤维复合材料的断裂应力及其机理是应变率相关的。但是, 很少有学者试图建立复合材料高应变率响应的本构模型。Gates 和 Sun<sup>[4]</sup>提出了一种复合材料层合板的弹性粘塑性模型, 其中运用了由 Malvern<sup>[5]</sup>提出的过应力概念。Yoon 和 Sun<sup>[6]</sup>在不同的应变率下, 对复合材料板进行了偏轴拉伸实验, 通过分析所获得的应力-应变曲线, 得到了一种粘塑性模型。而这些粘塑性模型适用的应变率处于  $1 \times 10^{-6}$  到  $1 \times 10^{-3}$  范围之内。本文所用的粘塑性模型是由 C. A. Weeks & C. T. Sun<sup>[7]</sup>所提出的, 此种模型是一种三维粘塑性模型, 能够模拟一般的加载情况, 适用于对各种应变率响应进行分析, 对不同时间段具有不同加载速率的情况也适用。本文利用有限元自动生成系统 (FEPG), 将上述粘塑性模型引入该系统中, 编制了自用的有限元程序。以本文的粘塑性模型为例, 将粘塑性分析的原理、有限元方法进行了阐述, 并研究了差分参数变化和时间步长变化对计算结果的影响情况, 有助于人们对粘塑性有限元法的理解。以单向纤维增强 PEEK 复合材料为算例, 将有限元程序计算出的应力-应变数值模拟结果和实验结果进行比较得知, 二者相当吻合。从而, 验证了所编程序的精确性, 同时, 也验证了所用粘塑性模型的可靠性。

## 2. 三维粘塑性模型<sup>[7]</sup>

C. A. Weeks & C. T. Sun 所用的单参数势函数为:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 + 2a_{66}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) \right] \quad (1)$$

他们假设复合材料在纤维方向, 即 1 方向是线弹性的, 而在垂直于纤维方向的 2-3 面内是横观各向同性的。式 (1) 中的  $\sigma_{ij}$  指的是在主轴 (1、2、3) 坐标系下的应力,  $a_{66}$  是表

明各向异性的一个系数，其通过实验被确定为  $a_{66} = 2.0$ 。

塑性应变率为：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

定义有效应力  $\bar{\sigma}$  为：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3f} \quad (3)$$

由单位体积塑性功的变化率<sup>[4]</sup>

$$\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \bar{\dot{\varepsilon}}^p \quad (4)$$

并根据 (1)、(2)、(3)、(4) 式可以推出  $\dot{\lambda}$  和有效塑性应变率  $\bar{\dot{\varepsilon}}^p$ ：

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\dot{\varepsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \quad (5)$$

有效塑性应变率为：

$$\bar{\dot{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{1}{6} [(\dot{\varepsilon}_{22}^p - \dot{\varepsilon}_{33}^p)^2 + \frac{2}{a_{66}} (\dot{\gamma}_{12}^p)^2 + \frac{2}{a_{66}} (\dot{\gamma}_{13}^p)^2 + (\dot{\gamma}_{23}^p)^2]}^{1/2} \quad (6)$$

总的应变率是：

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7)$$

总的应变率由弹性部分和粘塑性部分组成，其中的弹性部分  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  与  $\bar{\sigma}$  之间服从弹性的应力-应变关系<sup>[9]</sup>：

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{\dot{\varepsilon}^e\} \quad (8)$$

其中，[D]为主轴坐标系下的弹性刚度矩阵。

由 (3) 式可知，此粘塑性模型需要确定有效应力  $\bar{\sigma}$  和有效塑性应变率  $\bar{\dot{\varepsilon}}^p$  之间的关系。

C. A. Weeks & C. T. Sun 所采用的函数形式是：

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^* (1 + c \ln \frac{\bar{\dot{\varepsilon}}^p}{\bar{\dot{\varepsilon}}^{p*}}) \quad (9)$$

其中，c 是一个常数，经实验确定其为 0.02,  $\bar{\sigma}^*$ ,  $\bar{\dot{\varepsilon}}^{p*}$  分别是所选择参考应变率状态下的有效应力和有效塑性应变率。本文所选择的参考状态的应变率是  $1 \times 10^{-5}$ ，此状态下的  $\bar{\dot{\varepsilon}}^{p*}$  选择的是此状态下的有效塑性应变率的平均值  $5.99 \times 10^{-6}$ 。参考状态下的有效应力与有效塑性应变的关系为<sup>[7]</sup>：

$$\bar{\varepsilon}^{p*} = \begin{cases} A_1(\bar{\sigma}^*)^{n_1} & \bar{\sigma}^* \leq \bar{\sigma}^t \\ A_2(\bar{\sigma}^*)^{n_2} & \bar{\sigma}^* \geq \bar{\sigma}^t \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $A_1=5.01 \times 10^{-14}(\text{Mpa})^{-n_1}$ ,  $A_2=1.76 \times 10^{-21}(\text{Mpa})^{-n_2}$ ,  $\bar{\sigma}^t = 155.71 \text{ Mpa}$ .

对任意时刻, 已知  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  和  $\bar{\varepsilon}^p$ , 使  $\bar{\varepsilon}^{p*} = \bar{\varepsilon}^p$ , 就可以由 (10) 和 (9) 式, 求出  $\bar{\sigma}$ 。反过来, 如果已知  $\bar{\varepsilon}^p$  和  $\bar{\sigma}$ , 也可以求出此时此刻下的  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ 。这样, 由 (2) 式可以确定所有塑性应变率分量。

### 3. 粘塑性有限元法<sup>[8]</sup>

在粘塑性问题中, 应力和变形是与时间相关的, 基本变量应当包含时间变量  $t$ 。在这类问题的有限元分析中需要对时间变量进行离散化, 也就是计算某些离散时刻上的各种力学量。我们考虑一个典型的时间步长  $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ , 在这其间载荷由  $R_m$  变化到  $R_{m+1}$ , 相应的载荷增量  $\Delta R_m = R_{m+1} - R_m$ 。在这时间步长的开始, 即时刻  $t_m$ , 对应于载荷  $R_m$  的位移  $u_m$ , 应变  $\varepsilon_m$ , 应力  $\sigma_m$ , 粘塑性应变  $\varepsilon^p$  和粘塑性应变率  $\dot{\varepsilon}^p$  都是已知的。要做的是求这个时间步长之末  $t_{m+1}$  时刻的各力学量。

由式 (2)、(3)、(5)、(9) 可以得到:

$$\varepsilon_{ij}^p = \Phi(\bar{\sigma}) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (11)$$

其中, 由 (5)、(9) 式可以推出

$$\Phi(\bar{\sigma}) = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^{p*}}{\bar{\sigma}} e^{\frac{(\bar{\sigma}^* - 1)}{c}} \quad (12)$$

设在所考虑的时间步长  $\Delta t_m$  内, 粘塑性应变增量为

$$\Delta \varepsilon_m^p = \dot{\varepsilon}_{m+\theta}^p \Delta t_m \quad (13)$$

其中

$$\dot{\varepsilon}_{m+\theta}^p = (1 - \theta) \dot{\varepsilon}_m^p + \theta \dot{\varepsilon}_{m+1}^p \quad (14)$$

其中,  $\dot{\varepsilon}_m^p$  和  $\dot{\varepsilon}_{m+1}^p$  分别表示  $t_m$  和  $t_{m+1}$  时刻的粘塑性应变率。  $\theta \in [0, 1]$  为差分参数。

为了确定 (14) 式中的  $\dot{\varepsilon}_{m+1}^p$ , 可使用泰勒展式, 不计二次以上的项, 有

$$\dot{\varepsilon}_{m+1}^p = \dot{\varepsilon}_m^p + H_m \Delta \sigma_m \quad (15)$$

$$H_m = \left( \frac{\partial \dot{\varepsilon}^p}{\partial \sigma} \right)_m = H_m(\sigma_m) \quad (16)$$

其中  $\Delta \sigma_m$  是在时间步长  $\Delta t_m$  内的应力增量, 矩阵是应力为  $\sigma_m$  时的值。

由 (11)、(12) 式可以求出

$$H_m = \Phi \frac{(\frac{\partial f}{\partial \sigma})^T}{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}} + \frac{d\Phi}{df} \frac{\partial f}{\partial \sigma} (\frac{\partial f}{\partial \sigma})^T \quad (17)$$

将 (15) 式代入 (14) 式, 则 (13) 式成为

$$\Delta \varepsilon_m^p = \dot{\varepsilon}_m^p \Delta t_m + \theta \Delta t_m H_m \Delta \sigma_m \quad (18)$$

设在时间步长  $\Delta t_m$  内的总应变增量  $\Delta \varepsilon_m$  可以分解为弹性部分  $\Delta \varepsilon_m^e$  和粘塑性部分  $\Delta \varepsilon_m^p$  二者之和, 而弹性应变增量与应力增量之间服从弹性的应力-应变关系:

$$\Delta \sigma_m = D \Delta \varepsilon_m^e = D(\Delta \varepsilon_m - \Delta \varepsilon_m^p) \quad (19)$$

将 (18) 式代入 (19) 式得

$$\Delta \sigma_m = \bar{D}_m (\Delta \varepsilon_m - \dot{\varepsilon}_m^p \Delta t_m) \quad (20)$$

其中,

$$\bar{D}_m = (I + \theta \Delta t_m D H_m)^{-1} D \quad (21)$$

对于纤维增强复合材料而言, 式 (20) 是主轴坐标系下的增量应力应变关系, 对任意的 XYZ 坐标系要进行坐标变换<sup>[9]</sup>, 得到任意坐标系下的增量应力-应变关系

$$(\Delta \sigma_m)_X = (\bar{D}_m)_X [(\Delta \varepsilon_m)_X - (\dot{\varepsilon}_m^p)_X \Delta t_m] \quad (22)$$

其中,  $( )_X$  代表相应的量在 XYZ 坐标系下的转换值。

在时间步长  $\Delta t_m$  内, 虚功方程的增量形式为

$$\int_V (\bar{D}_m)_X (\Delta \varepsilon_m)_X \delta \varepsilon dV = \int_V f_{m+1} \delta u + \int_\Gamma T_{m+1} \delta u d\Gamma - \int_V \sigma_m \delta \varepsilon dV + \int_V (\bar{D}_m)_X (\dot{\varepsilon}_m^p)_X \Delta t_m \quad (23)$$

利用 FEPG, 将虚功方程的左端项和右端项表示出来, 可以生成特有的单元子程序。通过程序可以计算出此时间步长内的位移、应变、应力、粘塑性应变增量, 叠加上时间步长开始时的各力学量, 进而可以求出时间步长之末的各力学量。如果没有达到预设的最大时刻, 就可以转入下一个时刻的计算。

式 (14) 中的差分参数,  $\theta=0$  为完全显式的差分法,  $\theta=1$  为完全隐式差分法。  $\theta < \frac{1}{2}$

是条件稳定, 时间步长必须小于某一个临界值,  $\theta \geq \frac{1}{2}$  是无条件稳定的。

#### 4. 数值算例

为了验证所编制程序的精确性, 也为了了解此种粘塑性模型对热塑性复合材料 AS4/PEEK 的模拟情况, 我们计算了  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $15^\circ$  纤维铺设的 PEEK 复合材料板 (见图 1, 铺设角指得是纤维铺设方向与 X 轴的夹角) 在偏轴拉伸下的应力/应变曲线, 并与实验结果进行了比较, 我们所考虑的应变率是  $0.1s^{-1}$ 。在程序中, 取  $\theta = 0.65$ ,  $\Delta t = 0.001s$ , 各算了 100 个时间步, 材料最终的纵向线应变达到  $10000 \mu\varepsilon$ 。AS4/PEEK 的弹性参数见表 1 所示。

Table 1. Elastic and plastic properties of AS4/PEEK

$E_1$	$E_2$ and $E_3$	$G_{12}$ and $G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$ and $\nu_{13}$	$\nu_{23}$
127.6GPa	10.3GPa	6.0GPa	3.45GPa	0.32	0.49

表 1 中,  $E_1$ ,  $E_2$  和  $E_3$  分别表示纵向和横向的弹性模量,  $G_{ij}$  表示剪切弹性模量,  $\nu_{ij}$  表示泊松比。

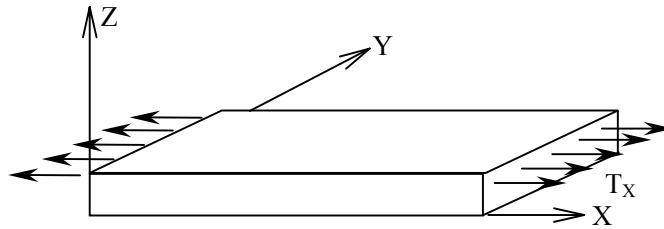


图 1 (Fig.1) 复合材料板载荷图

偏轴拉伸应力/应变曲线的数值模拟结果与实验结果<sup>[7]</sup>的比较图线见图 2 所示。

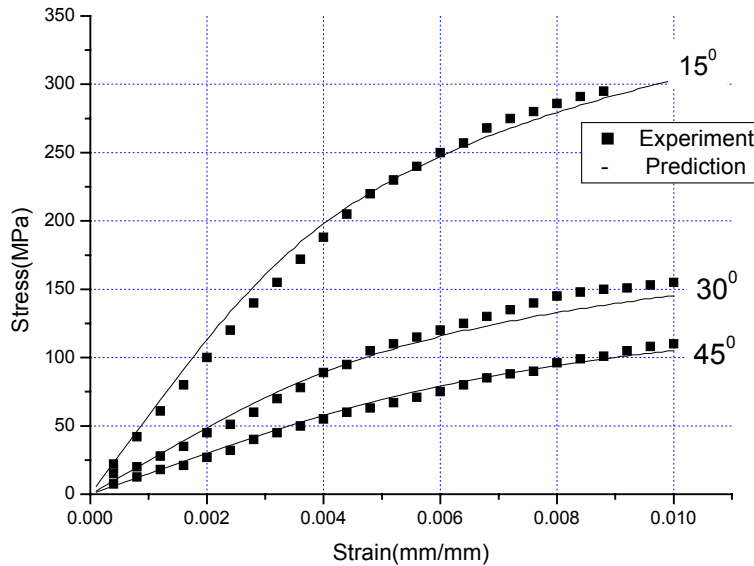


图 2 (Fig.2) 应变率为  $0.1s^{-1}$  情况下的粘塑性模型数值模拟结果与实验结果比较图线从比较图线可以看出, 各铺设角的偏轴应力-应变曲线的有限元数值模拟结果与实验图线相当吻合。

### 5. $\theta$ 的不同取值对计算结果的影响

为了了解  $\theta$  的不同取值对计算结果的影响情况, 在程序中我们取  $\theta$  分别为 0, 0.5, 0.65, 0.85, 1, 对  $45^\circ$  纤维铺设的 PEEK 复合材料板进行了计算, 其比较图线见图 3 所示。

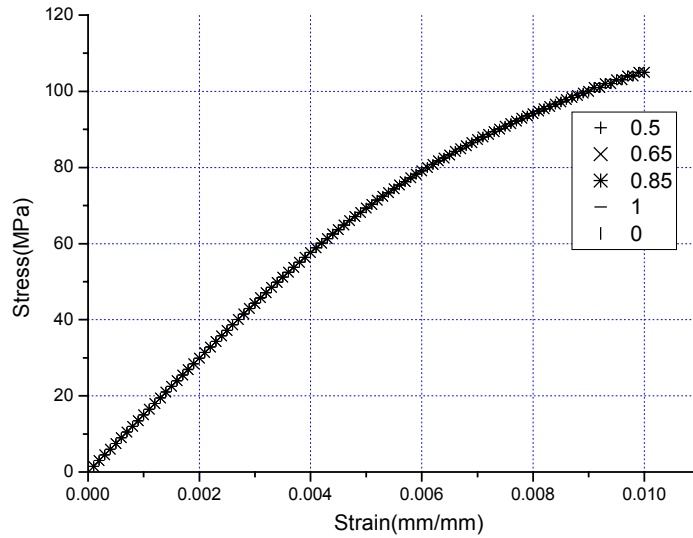


图3 (Fig.3)  $\theta$  的不同取值对计算结果的影响图线

从图3可以看出， $\theta$  取不同的值对本模型的计算结果影响甚微。

### 6. 不同时间步长对计算结果的影响

为了了解计算结果对不同时间步长的敏感程度，我们选择了 0.001,0.002,0.003 三种时间步长， $\theta$  取 0.65,对  $45^\circ$  纤维铺设的 PEEK 复合材料板进行了计算，其比较图线见图 4、5 所示。

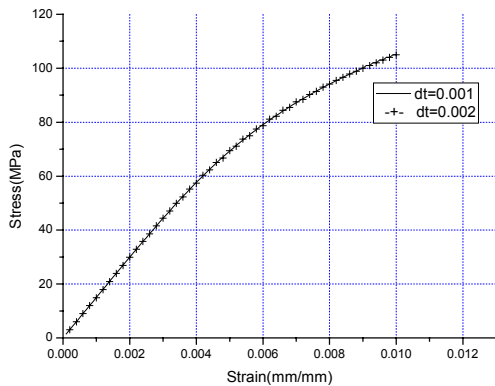


图4 时间步长分别为 0.001/0.002 的计算结果

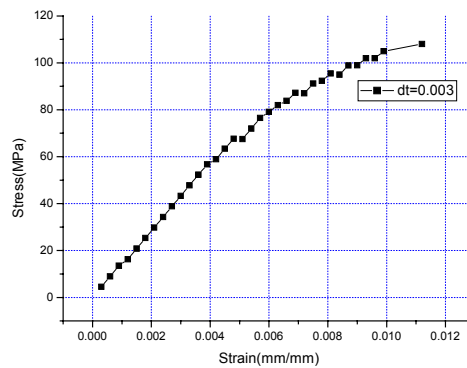


图5 时间步长为 0.003 时的计算结果

从图4可以看出，当时间步长使计算结果达到一定的精度，计算结果对时间步长不太敏感，而时间步长太大，会影响计算精度。

### 7. 结论

本文利用有限元自动生成系统 FEPG，将 PEEK 复合材料的三维粘塑性模型引入该系统中，编制了自用的有限元程序，通过将算例的有限元模拟结果跟实验结果进行比较，可以看到二者符合得很好，从而验证了所编程序的正确性，另一方面也验证了该模型的可靠性。本文在粘塑性问题的有限元法中给出了差分参数和时间步长对计算结果的影响图线，从图中可以看出，在保证稳定性的情况下，优化系数对计算结果影响甚微；当时间步长使计算结果达到一定的精度，计算结果对时间步长不太敏感，而时间步长太大会使计算结果不理想。本项研究成果为解决三维粘塑性 PEEK 层合板的界面应变、应力和损伤机理打下了基础。

## 8. 参考文献

- [1] Lifshitz, J., Impact strength of angle-ply fiber reinforced materials. *J. Compos. Mater.*,1976,10(1),92-101.
- [2] Daniel,I. M. ,Fracture of hybrid composite materials under dynamic loading, *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials (ICCM/9)*,Madrid,Spain,12-16 July 1993,IV,pp.220-227.
- [3] Powers, B. M., Vinson, J. R., Wardle, M.&Scott, B., High strain rate effects on two AS4 graphite fiber polymer matrix composites, *High Strain Rate Effects on Polymer,Metal and Cramic Matrix Composites and Other Advanced Materials*,AD-Vol.48,ed. Y. D.S. Rajapakse and J. R. Vinson. ASME, NEW YORK,1995,pp.179-190.
- [4] Gates, T. S. and Sun, C. T., Elastic/Viscoplastic constutive model for fiber reinforced thermoplastic composites. *AIAA J.*,1991,29(3),457-463.
- [5] Malvern, L. E., The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect. *ASME J. Appl. Mech.*,1951,18,203-208.
- [6] Yoon, K. J. and Sun, C. T., Characterization of elastic-viscoplastic properties of an AS4/PEEK thermoplastic composites. *J. Compos. Mater.*,1991,25,1277-1296.
- [7] C. A. Weeks & C. T. Sun, Modeling nonlinear rate-dependent behaviour in fiber-reinforced composites. *Composites Science and Technology*,1998,58,603-611.
- [8] 殷有泉, 固体力学非线性有限元引论, 北京大学出版社、清华大学出版社 (1986)。
- [9] J.H. Zhao,X.F. Wang, L.R. Dharani, J. Wei, Notch stress concentrations and failure characteristics in laminates with triple parallel notches,*Composites Science and Technology*,2000,60,2865-2872

### The Viscoplastic Finite Element Method of Thermoplastic Composites Based on FEPG

Dingshurong Tongjingwei Shenmin

((the mechanical department of Tianjin University,300072)

**Abstract:** In this paper for the special viscoplastic model of the thermoplastic composites , we developed our own finite element procedure using the finite element generating system(FEPG). Taking the viscoplastic model in this paper as an example , the theories and finite element method of the viscoplastic analysis are explained in detail, which is good for the understanding of the viscoplastic finite element method of researchers. Taking the unidirectional fiber-reinforced composites as numerical examples,through comparing the numerical simulating results and the experimental ones, we get the conclusion that the two kinds of results fit well. The conclusion verifies the precision of our developed program on one hand and on the other hand proves the reliability of the used viscoplastic model.

**Keywords:** thermoplastic composites, AS4/PEEK, rate-dependent behaviour, viscoplastic model, finite element method, FEPG.